

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ – ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Смолькин Юрий Андреевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МАТРИЦ,
ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРОВ**

Направление 01.03.02

Прикладная математика, фундаментальная информатика и
программирование

Научный руководитель,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
Калинина Е. А.

Санкт-Петербург
2018

Содержание

Введение	4
Постановка задачи	5
Обзор литературы	6
Глава 1. Устойчивость матрицы с постоянными коэффициентами	7
1.1. Проверка устойчивости матрицы через вычисление характеристического полинома	7
1.1.1 Нахождение характеристического полинома по методу Леверье	8
1.1.2 Нахождение характеристического полинома по методу Данилевского	8
1.2. Проверка устойчивости матрицы через нахождение всех собственных чисел	10
1.2.1 QR-алгоритм	10
1.3. Случай симметрической матрицы	12
1.3.1 Проверка устойчивости симметрической матрицы . .	12
1.3.2 Устойчивость блочных симметрических матриц . . .	12
Глава 2. Нахождение радиуса устойчивости матрицы	13
2.1. Обоснование алгоритма	13
2.2. Алгоритм	17
Глава 3. Исследование устойчивости матриц, зависящих от параметров	18

3.1. Исследование устойчивости симметрических матриц вида $A_0 + A_1 t_1 + \dots + A_s t_s$	18
3.2. Исследование устойчивости симметрических матриц вида $At^p + Bt^q$	21
3.3. Исследование устойчивости матриц с помощью нахождения радиуса устойчивости	22
3.4. Устойчивость блочных симметричных матриц	27
Приложение. Программная реализация в Wolfram Mathematica	29
1. Вычисление радиуса устойчивости матрицы	29
2. Алгоритм проверки устойчивости параметрической матрицы с помощью нахождения $r(A)$	30
Список литературы	31

Введение

Как известно [3], линейная однородная система $\dot{x} = Ax$ с постоянной матрицей A асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части.

Поэтому задача установления необходимых и достаточных условий, при которых все корни данного полинома расположены в левой полуплоскости, имеет фундаментальное значение в ряде прикладных областей, в которых исследуется устойчивость механических и электрических систем.

К концу XIX века Э. Дж. Раус и А. Гурвиц, независимо от друг друга дали решение этой задачи. Полученные Гурвицем детерминантные неравенства известны в настоящее время под названием условий Рауса-Гурвица [2].

В случае матрицы, зависящей от параметров, проверка этих условий трудоемка, особенно для матриц больших размерностей. Тем самым, актуальным является поиск других подходов к этой задаче.

В данной работе предложен иной подход, основанный на нахождении $r(A)$ – радиуса устойчивости матрицы, преимуществом которого является более быстрая работа с матрицами больших порядков. Также дополнительно выведены некоторые следствия из статьи [16] и расширен класс параметрических матриц, для которых проверка устойчивости тривиальна.

Далее под устойчивостью матрицы подразумевается отрицательность вещественных частей всех её собственных чисел. Аналогично для полиномов: полином устойчив, если все его корни лежат в левой полуплоскости.

Область устойчивости параметрической матрицы – множество значений параметров, при которых матрица устойчива.

Постановка задачи

Задача заключается в проверке матрицы $A = A(t_1, \dots, t_s)$ на устойчивость при всех значениях параметров (t_1, \dots, t_s) из некоторой области $[t_1, \overline{t_1}] \times \dots \times [t_s, \overline{t_s}] \subset \mathbb{R}^s$.

В первой главе вводятся основные понятия и утверждения, связанные с устойчивостью постоянной матрицы. Рассматриваются способы проверки этой матрицы на устойчивость. Приводится частный случай, когда A – симметрическая матрица.

Во второй главе рассматривается способ нахождения радиуса устойчивости матрицы $r(A)$, с помощью которого, в дальнейшем, можно устанавливать устойчивость матрицы с элементами, зависящими от параметров.

Третья глава посвящена устойчивости параметрических матриц. В ней излагаются известные результаты, а также делается их обобщение. Описан новый подход к изучению устойчивости матриц, основанный на нахождении радиуса устойчивости матрицы.

В качестве приложения приводится код вычисления $r(A)$ и соответствующий алгоритм проверки устойчивости.

Обзор литературы

При написании данной работы применялись научные источники, учебная литература, а также статьи из научных изданий.

Всю используемую литературу можно разделить на несколько частей. Первая часть включает литературу по алгебре и теории матриц. Сюда можно отнести книги [1], [2], [4], [5], [7], [8], [9].

Основные понятия о теории устойчивости взяты из книг [1], [2], [3].

При изучении понятия радиуса устойчивости использовались статьи [10], [11], [15], [17], в которых уже были приведены некоторые алгоритмы вычисления $r(A)$, а также были доказаны некоторые важные теоремы. Для получения нового способа нахождения $r(A)$ применялся алгоритм нахождения значений параметра, при котором данная матрица имеет кратное собственное число [13].

Использовались результаты, касающиеся линейных симметричных параметрических матриц: [12], [16].

Необходимые исторические сведения были взяты из книг [2] и [5].

Глава 1. Устойчивость матрицы с постоянными коэффициентами

1.1. Проверка устойчивости матрицы через вычисление характеристического полинома

Проверка устойчивости матрицы сводится к проверке устойчивости соответствующего характеристического полинома. В [8] разобраны способы эффективного нахождения характеристического полинома матрицы. Из них можно выделить:

- **Метод Леве́рье**, требующий большего числа операций, чем другие методы, но совершенно нечувствительный к частным особенностям матрицы, в частности к «провалам» промежуточных определителей.
- **Метод Данилевского** – самый быстрый из всех методов.

После нахождения характеристического полинома используется Критерий Рауса–Гурвица: Многочлен $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ с вещественными коэффициентами устойчив тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\Gamma_1 > 0, \Gamma_2 > 0, \dots, \Gamma_n > 0,$$

где

$$\Gamma_k = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & a_{2k-3} & a_{2k-4} & a_{2k-5} & a_{2k-6} & \dots & a_k \end{vmatrix}$$

(предполагается, что $a_s = 0$ при $s > n$)

Теперь опишем некоторые методы нахождения характеристического полинома.

1.1.1 Нахождение характеристического полинома по методу Леве-рье

Метод Леверье основан на формулах Ньютона и следующем свойстве собственных чисел матрицы A : $\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = \text{Sp } A^k$

Алгоритм

- Вычисляем A^2, A^3, \dots, A^n
- Находим $s_1 = \text{Sp } A, \dots, s_n = \text{Sp } A^n$
- Вычисляем коэффициенты характеристического полинома:

$$p_1 = s_1, p_2 = (s_2 - p_1 s_1)/2, \dots, p_n = (s_n - p_1 s_{n-1} - \dots - p_{n-1} s_1)/n$$

Тогда характеристический полином можно представить так:

$$f(t) = t^n - p_1 t^{n-1} - \dots - p_n$$

Этот метод требует $\frac{1}{2}(n-1)(2n^3 - 2n^2 + n + 2)$ умножений [8].

1.1.2 Нахождение характеристического полинома по методу Данилевского

Геометрический смысл этого метода состоит в следующем: исходная матрица A рассматривается как матрица оператора в базисе e_1, \dots, e_n . Предполагается, что векторы $e_1, Ae_1, \dots, A^{n-1}e_1$ линейно независимы. Тогда

$$A^n e_1 = p_1 A^{n-1} e_1 + p_2 A^{n-2} e_1 + \dots + p_n e_1$$

Ясно, что коэффициенты p_1, p_2, \dots, p_n являются искомыми коэффициентами характеристического полинома.

В базисе $e_1, Ae_1, \dots, A^{n-1}e_1$ рассматриваемый оператор будет иметь

форму Фробениуса:

$$F_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & p_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & p_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & p_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & p_1 \end{pmatrix}$$

содержащую в явном виде искомые коэффициенты характеристического полинома.

Переход от базиса e_1, \dots, e_n к базису $e_1, Ae_1, \dots, A^{n-1}e_1$ осуществляется в $n - 1$ шагов. Каждый шаг состоит в переходе от базиса $e_1, Ae_1, \dots, A^{k-1}e_1, e_{k+1}, \dots, e_n$ к базису $e_1, Ae_1, \dots, A^{k-1}e_1, A^k e_1, e_{k+2}, \dots, e_n$.

Алгоритм. В алгоритме для удобства используются промежуточные матрицы B_i , сам процесс можно изобразить схематически:

$$A = A_1 \rightarrow B_1 \rightarrow A_2 \rightarrow B_2 \rightarrow \dots \rightarrow B_{n-1} \rightarrow A_n = F_A$$

k -й шаг алгоритма:

$$b_{ij}^{(k)} = \begin{cases} a_{k+1,j}^{(k)} / a_{k+1,k}^{(k)} & , i = k + 1 \\ a_{i,j}^{(k)} - a_{i,k}^{(k)} b_{k+1,j}^{(k)} & , i \neq k + 1 \end{cases}$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = \begin{cases} b_{i,1}^{(k)} a_{1,k}^{(k)} + \dots + b_{i,n}^{(k)} a_{n,k}^{(k)} & , j = k + 1 \\ b_{i,j}^{(k)} & , j \neq k + 1 \end{cases}$$

Метод Данилевского самый быстрый в сравнении с другими, он требует всего $n^3 - n^2$ умножений [8].

1.2. Проверка устойчивости матрицы через нахождение всех собственных чисел

1.2.1 QR-алгоритм

QR-алгоритм имеет исключительно важное значение для вычислительной практики. Этот метод позволяет сравнительно быстро находить все собственные числа даже для матриц большой размерности.

QR-алгоритм позволяет получить следующее разложение матрицы: $A = U^T \tilde{A} U$, где U – ортогональная матрица, \tilde{A} – квазитреугольная матрица с максимальным размером блока 2. В случае вещественности спектра матрицы A , мы получим разложение Шура $A = U^T S U$, где S будет уже треугольной матрицей.

Лемма 1 (о QR-разложении). Для любой квадратной матрицы A существуют такие ортогональная матрица Q и верхнетреугольная матрица R , что справедливо разложение $A = QR$.

Доказательство. Пусть $A = [a_1, \dots, a_n]$, $Q = [q_1, \dots, q_n]$ – матрицы, записанные по столбцам. Осуществим процесс Грама – Шмидта:

$$z_1 = q_1$$

$$z_2 = q_2 = v(a_2 - \langle a_2, z_1 \rangle z_1)$$

$$\dots$$

$$z_n = q_n = v(a_n - \langle a_n, z_{n-1} \rangle z_{n-1} - \dots - \langle a_n, z_1 \rangle z_1)$$

Здесь $v : x \mapsto x \langle x, x \rangle^{-1/2}$. Далее вычисляем $R = Q^{-1} A = Q^T A$. □

Таким образом получено разложение произвольной квадратной матрицы в произведение ортогональной и верхнетреугольной. Перейдем непосредственно к QR алгоритму.

Пусть задана матрица $A_0 \in M_n$. В соответствии с леммой запишем $A_0 = Q_0 R_0$ и образуем матрицу $A_1 = R_0 Q_0$. Снова запишем $A_1 = Q_1 R_1$, где Q_1 – ортогональная, а R_1 – верхнетреугольная матрицы, и продолжим по аналогии. Итак, на каждом шаге выполняется QR-разложение $A_k = Q_k R_k$ и вычисляется матрица $A_{k+1} = R_k Q_k$.

Все матрицы A_k , полученные с помощью QR-алгоритма, ортогонально эквивалентны, поскольку $A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^{-1} Q_k R_k Q_k = Q_k^{-1} A_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k$, и значит, все A_k соответственно имеют одинаковые собственные числа.

Теорема 1 ([9]). Если все собственные числа матрицы $A_0 = A$ различны по модулю (кроме комплексно-сопряженных), то QR-алгоритм вырабатывает последовательность матриц A_k , которые при $k \rightarrow \infty$ стремятся к верхнетреугольной матрице. Если же у матрицы A есть комплексные числа, то A_k стремится к матрице \tilde{A} (квазитреугольная матрица с максимальным размером блока 2).

Примечание. Если же у матрицы A есть собственные числа с одинаковым модулем (но не комплексно-сопряженные), то QR-алгоритм может и не сходиться.

1.3. Случай симметрической матрицы

1.3.1 Проверка устойчивости симметрической матрицы

В случае симметрической матрицы проверку устойчивости можно производить с помощью следующей теоремы:

Теорема 2 ([13]). Симметрическая матрица A устойчива тогда и только тогда, когда $A_1 < 0, A_2 > 0, \dots$, где A_i – i -й угловой минор матрицы A .

Поскольку симметрическая матрица A устойчива тогда и только тогда, когда матрица $-A$ положительно определена, эту теорему можно рассматривать как критерий Сильвестра.

1.3.2 Устойчивость блочных симметрических матриц

Рассмотрим вопрос, как можно исследовать устойчивость симметричной блочной матрицы $X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$, где A является невырожденной матрицей.

Поскольку вопрос о положительной определенности эквивалентен вопросу об устойчивости матрицы, мы можем переформулировать теорему 1.12 из [11] в терминах устойчивости:

Теорема 3. Пусть $X = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C \end{pmatrix}$, где A является невырожденной матрицей. Тогда матрица X устойчива тогда и только тогда, когда устойчивы матрицы A и $C - B^T A^{-1} B$.

Глава 2. Нахождение радиуса устойчивости матрицы

2.1. Обоснование алгоритма

В этой секции предлагается новый подход для нахождения радиуса устойчивости матрицы, основанный на статьях [10] и [13].

Определение. Пусть квадратная матрица A порядка n устойчива и $\Lambda(A)$ – ее спектр. Введем следующие понятия:

$\eta(A) = \max\{\operatorname{Re}(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda(A)\}$ – *спектральная абсцисса* матрицы,

$r(A) = \inf\{\|T\| \mid \eta(A + T) \geq 0\}$ – *радиус устойчивости* матрицы.

В качестве нормы здесь можно выбрать либо 2-норму, либо норму Фробениуса: $\|A\| = \sqrt{\operatorname{Sp} A^T A}$. Согласно [10] радиус устойчивости $r(A)$ при этом не изменится.

Заметим, что $\inf\{\|T\| \mid \text{матрица } A + T \text{ неустойчива}\} = \inf\{\|T\| \mid \eta(A + T) \geq 0\} = r(A)$

Таким образом, если для исходной устойчивой матрицы A мы нашли $r = r(A)$, то тогда, прибавляя к матрице A любую матрицу X , такую, что $\|X\| < r$, мы получим также устойчивую матрицу $A + X$.

Число $r(A)$ можно находить по формуле $r(A) = \min_{\omega \in \mathbb{R}} \sigma_{\min}(A - i\omega E)$, где σ_{\min} – минимальное сингулярное число матрицы, но это трудоемко, так как нужно находить сингулярные числа матрицы с параметрами.

Введем следующую блочную матрицу: $H_A(\alpha) = \begin{pmatrix} A & -\alpha E \\ \alpha E & -A^T \end{pmatrix}$.

Теорема 4 ([10]). $H_A(\alpha)$ имеет чисто мнимое собственное число тогда и только тогда, когда $\alpha \geq r(A)$. Если α^* – минимальное среди таких положительных α , то $r(A) = \alpha^*$.

Теорема 5. $r(A) = \rho$, где ρ – минимальное значение параметра, при котором матрица $H_A(\alpha)$ имеет кратное чисто мнимое собственное число.

Доказательство. Согласно [15] имеем, что характеристический полином матрицы $H = H_A(\alpha)$ является четным. Тогда если λ является собственным числом матрицы H , то и $-\lambda$, $\bar{\lambda}$, $-\bar{\lambda}$ также будут являться собственными числами матрицы H .

Ситуация, когда собственные числа матрицы $H_A(\alpha)$ ни при каких

значениях параметра α не лежат на мнимой оси, невозможна в силу устойчивости матрицы A и теоремы 4. Таким образом, при некотором α мы получим кратное собственное число на мнимой оси. Это значение параметра как раз и будет радиусом устойчивости матрицы: $r(A) = \rho$. \square

Будем искать кратные собственные числа матрицы $H = H_A(\alpha)$ по алгоритму из статьи [13]. Ранее те же результаты были получены в [6]. Введем необходимые определения.

Определение. Рассмотрим полином

$$f(x) = b_0x^d + b_1x^{d-1} + \dots + b_d, \quad b_j \in \mathbb{C}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, d.$$

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{C}$ – его корни. *Суммами Ньютона* полинома $f(x)$ называются величины $s_p = x_1^p + x_2^p + \dots + x_d^p$, $p = 0, 1, 2, \dots$

Определение. Пусть $A \in M_{u,v}$, $B \in M_{p,q}$. *Кронекеровским произведением* матриц A и B называется следующая матрица порядка $up \times vq$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1v}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2v}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{u1}B & a_{u2}B & \dots & a_{uv}B \end{pmatrix}$$

Обозначим через \mathcal{C}_H матрицу $\mathcal{C}_H = H \otimes E_{2n} - E_{2n} \otimes H$.

Теорема ([13]). Собственные числа матрицы \mathcal{C}_H равны $\lambda_i - \lambda_j$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}$ – собственные числа матрицы H , $i, j = 1, 2, \dots, 2n$

Следствие. Матрица H имеет кратные собственные числа тогда и только тогда, когда у матрицы \mathcal{C}_H кратность собственного числа 0 больше, чем $2n$. Матрица H не имеет кратных собственных чисел тогда и только тогда, когда у матрицы \mathcal{C}_H кратность собственного числа 0 равна $2n$.

Обозначим через s_p и S_p ($p = 0, 1, 2, \dots$) суммы Ньютона характеристических полиномов матриц H и \mathcal{C}_H соответственно.

Теорема ([13]). Значения S_p ($p = 1, 2, \dots$) могут быть найдены по формулам:

$$S_{2p} = 4ns_{2p} + (-1)^p \binom{2p}{p} s_p^2 + 2 \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^j \binom{2p}{j} s_{2p-j} s_j$$

$$S_{2p-1} = 0$$

Представим характеристический полином матрицы C_H в виде $\det(C_H - \mu E_{4n^2}) = a_0 \mu^{4n^2} + a_1 \mu^{4n^2-1} + \dots + a_{4n^2}$.

Теорема ([13]). Матрица H имеет кратные собственные числа тогда и только тогда, когда $a_{4n^2-2n} = 0$.

Утверждение ([13]). a_{4n^2-2n} можно вычислить рекуррентно по формулам:

$$a_2 = -S_2, a_4 = -\frac{1}{2}(S_4 + a_2 S_2), \dots, a_{2p} = -\frac{1}{2p}(S_{2p} + \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j} S_{2p-2j})$$

Таким образом, мы получили полином $a_{4n^2-2n}(\alpha)$, корнями которого являются значения параметра α , при которых матрица $H_A(\alpha)$ имеет кратное собственное число. Радиусом устойчивости будет минимальный положительный корень r полинома $a_{4n^2-2n}(\alpha)$, такой, что матрица $H_A(r)$ имеет чисто мнимое собственное число.

Замечание 1. Как известно (см. пример в п.3.3), не всегда минимальный положительный корень \tilde{r} полинома $a_{4n^2-2n}(\alpha)$ является значением радиуса устойчивости, возможен вариант, когда матрица $H_A(\tilde{r})$ имеет кратное собственное число, но оно не является чисто мнимым. Таким образом, необходима проверка существования у $H_A(\tilde{r})$ чисто мнимого собственного числа. Для нас важно, что при определенном значении r^* у нас будет кратное чисто мнимое собственное число, а значит мы можем найти тот самый момент по этому алгоритму.

Также стоит заметить, что матрица H имеет простую блочную структуру, которая позволяет упростить вычисление $\text{Sp } H^m$.

Лемма 2. $H^m = \begin{pmatrix} A_m & (-1)^m C_m^T \\ C_m & (-1)^n A_m^T \end{pmatrix}$, где A_m и C_m определяются рекуррентно:

$$A_1 = A, C_1 = \alpha E, A_{m+1} = AA_m - \alpha C_m, C_{m+1} = \alpha A_m - A^T C_m$$

Доказательство. Проведем индукцию по m . База индукции очевидна. Пусть $H^m = \begin{pmatrix} A_m & (-1)^m C_m^T \\ C_m & (-1)^m A_m^T \end{pmatrix}$. Докажем требуемую формулу для H^{m+1} .

$$\begin{aligned}
H^{m+1} &= \begin{pmatrix} A & -\alpha E \\ \alpha E & -A^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_m & (-1)^m C_m^T \\ C_m & (-1)^m A_m^T \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} AA_m - \alpha C_m & (-1)^m AC_m^T - (-1)^m \alpha A_m^T \\ \alpha A_m - A^T C_m & (-1)^m \alpha C_m^T - (-1)^m A^T A_m^T \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} AA_m - \alpha C_m & (-1)^{m+1}(\alpha A_m^T - AC_m^T) \\ \alpha A_m - A^T C_m & (-1)^{m+1}(A^T A_m^T - \alpha C_m^T) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} A_{m+1} & (-1)^{m+1} C_{m+1}^T \\ C_{m+1} & (-1)^{m+1} A_{m+1}^T \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Таким образом рекуррентные формулы в условии теоремы верны. \square

Теорема 6. Если m четно, то $s_m = 2 \operatorname{Sp} A_m$. В противном случае $s_m = 0$.
Здесь A_m определяется рекуррентно: $A_1 = A$, $A_2 = A^2 - \alpha E$,
 $A_{m+2} = (A - A^T)A_{m+1} + (A^T A - \alpha^2 E)A_m$

Доказательство. По лемме 2: $H^m = \begin{pmatrix} A_m & (-1)^m C_m^T \\ C_m & (-1)^m A_m^T \end{pmatrix}$, где

$$A_1 = A, C_1 = \alpha E, A_{m+1} = AA_m - \alpha C_m, C_{m+1} = \alpha A_m - A^T C_m$$

Преобразуем последние формулы: $\alpha C_m = AA_m - A_{m+1}$,
 $\alpha A_m = C_{m+1} + A^T C_m$.

Имеем $\alpha^2 A_m = \alpha C_{m+1} + \alpha A^T C_m = AA_{m+1} - A_{m+2} + A^T(AA_m - A_{m+1}) =$

$$= AA_{m+1} - A_{m+2} + A^T AA_m - A^T A_{m+1}$$

Тогда $A_{m+2} = (A^T A - \alpha^2 E)A_m + (A - A^T)A_{m+1}$.

Таким образом, мы можем находить A_m без вычисления C_m . \square

Следствие. Если матрица A симметрическая, то s_m находится по следующим формулам:

$$s_{2m} = 2 \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \operatorname{Sp} A^{2m-2k} \alpha^{2k}, \quad s_{2m+1} = 0.$$

2.2. Алгоритм

В алгоритме на вход подается устойчивая матрица A порядка n .

- Находим s_p с помощью теоремы 6: $(p = 1, 2, \dots, 4n^2 - 2n)$

$$s_p = \begin{cases} 2 \operatorname{Sp} A_p & , p \text{ четно} \\ 0 & , p \text{ нечетно} \end{cases}$$

$$A_1 = A, A_2 = A^2 - \alpha E, A_{m+2} = (A - A^T)A_{m+1} + (A^T A - \alpha^2 E)A_m$$

Если матрица A симметрическая, то

$$s_p = \begin{cases} 2 \sum_{j=0}^{p/2} (-1)^j \binom{p/2}{j} \operatorname{Sp} A^{p-2j} \alpha^{2j} & , p \text{ четно} \\ 0 & , p \text{ нечетно} \end{cases}$$

- Вычисляем S_{2p} по следующим формулам: $(p = 1, 2, \dots, 2n^2 - n)$

$$S_{2p} = 4ns_{2p} + (-1)^p \binom{2p}{p} s_p^2 + 2 \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^j \binom{2p}{j} s_{2p-j} s_j$$

- Вычисляем $a_{4n^2-2n}(\alpha)$ с помощью следующей рекуррентной формулы

$$a_2 = -S_2, a_4 = -\frac{1}{2}(S_4 + a_2 S_2), \dots, a_{2p} = -\frac{1}{2p}(S_{2p} + \sum_{j=1}^{p-1} a_{2j} S_{2p-2j})$$

Здесь $p = 1, 2, \dots, 2n^2 - n$. Находим наименьший положительный корень этого полинома, получим потенциальное значение $r = r(A)$.

- Согласно замечанию 1 производим проверку, действительно ли $H(r)$ имеет собственные числа на мнимой оси.

Глава 3. Исследование устойчивости матриц, зависящих от параметров

3.1. Исследование устойчивости симметрических матриц вида $A_0 + A_1 t_1 + \dots + A_s t_s$

В этом параграфе матрицы A_i , где $i = 0, \dots, s$ являются симметрическими. Введем симметрическую линейную матрицу с s параметрами:

$$A(t_1, \dots, t_s) = A_0 + A_1 t_1 + \dots + A_s t_s$$

Устойчивость такой матрицы можно исследовать с помощью следующей теоремы:

Теорема 7 ([16]). Матрица $A(t_1, \dots, t_s) = A_0 + A_1 t_1 + \dots + A_s t_s$ устойчива при всех значениях (t_1, \dots, t_s) из $[\underline{t}_1, \overline{t}_1] \times \dots \times [\underline{t}_s, \overline{t}_s]$ тогда и только тогда, когда устойчивы все матрицы вида $A(t_1, \dots, t_s)$, где $t_i = \underline{t}_i$, либо $t_i = \overline{t}_i$ (Всего 2^s таких матриц)

С помощью этой теоремы можно установить либо что матрица устойчива в данной области, либо что в этой области есть неустойчивая матрица. В отличие от полной проверки по критерию Рауса–Гурвица больше сведений эта теорема не дает.

Пример. Для наглядности рассмотрим случай, когда $s = 2$. Пусть

$$\begin{aligned} A(t_1, t_2) &= \begin{pmatrix} -6 - 9t_1 - 8t_2 & 6 + 6t_2 & 1 + 4t_1 \\ 6 + 6t_2 & -9t_1 + t_2 & 1 - 3t_1 + 8t_2 \\ 1 + 4t_1 & 1 - 3t_1 + 8t_2 & 3 - 5t_1 - 9t_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 6 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -9 & 0 & 4 \\ 0 & -9 & -3 \\ 4 & -3 & -5 \end{pmatrix} t_1 + \begin{pmatrix} -8 & 6 & 0 \\ 6 & 1 & 8 \\ 0 & 8 & -9 \end{pmatrix} t_2 \end{aligned}$$

Будем проверять устойчивость матрицы в областях $[2, 4] \times [0, 3]$ и $[6, 8] \times [0, 2]$.

Для сравнения, найдем область устойчивости при помощи критерия Рауса-Гурвица. После составления детерминантных неравенств получим систему:

$$\begin{cases} -9t_1 - 8t_2 - 6 < 0 \\ 81t_1^2 + 63t_2t_1 + 54t_1 - 44t_2^2 - 78t_2 - 36 > 0 \\ -180t_1^3 - 1564t_2t_1^2 - 99t_1^2 + 229t_2^2t_1 + 289t_2t_1 + 336t_1 + 908t_2^3 + 1178t_2^2 + 301t_2 - 90 < 0 \end{cases}$$

Множество точек (t_1, t_2) , удовлетворяющих этой системе неравенств вместе с проверяемыми областями (прямоугольниками) представлена на рис. 1 с помощью системы Wolfram Mathematica:

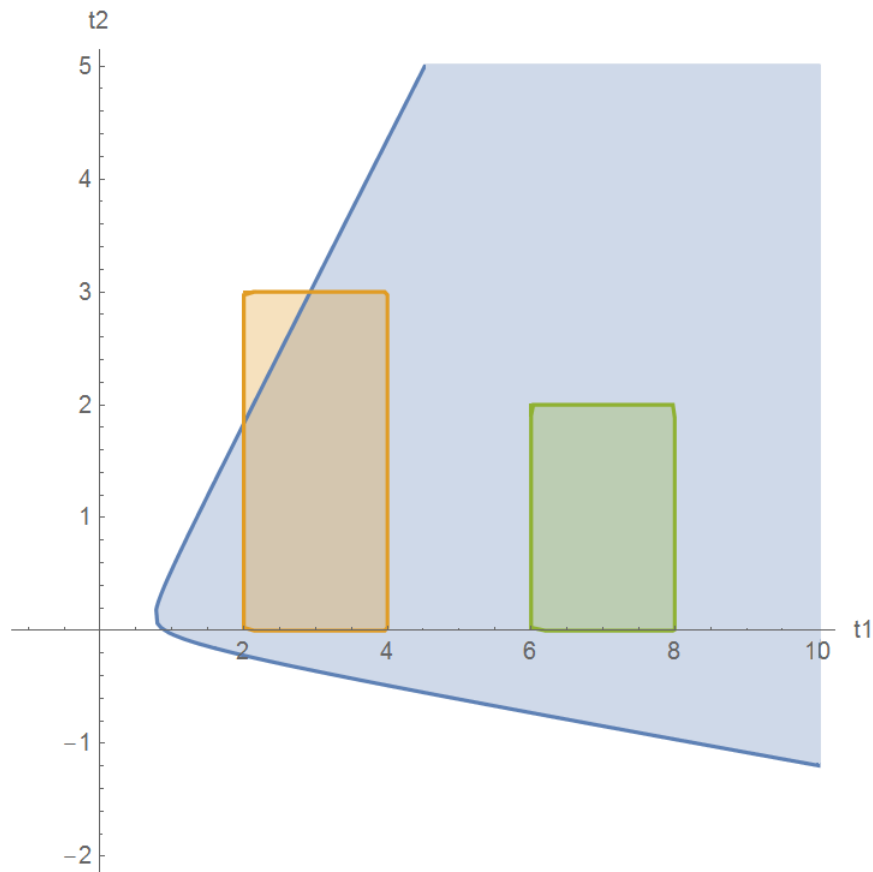


Рис. 1

Проверим устойчивость матрицы в области $[6, 8] \times [0, 2]$ по теореме 7. Для этого нам нужно проверить следующие 4 матрицы на устойчивость:

$$A(6, 0) = \begin{pmatrix} -60 & 6 & 25 \\ 6 & -54 & -17 \\ 25 & -17 & -27 \end{pmatrix}, \quad A(6, 2) = \begin{pmatrix} -76 & 18 & 25 \\ 18 & -52 & -1 \\ 25 & -1 & -45 \end{pmatrix}$$

$$A(8, 0) = \begin{pmatrix} -78 & 6 & 33 \\ 6 & -72 & -23 \\ 33 & -23 & -37 \end{pmatrix}, \quad A(8, 2) = \begin{pmatrix} -94 & 18 & 33 \\ 18 & -70 & -7 \\ 33 & -7 & -55 \end{pmatrix}$$

Как нетрудно убедиться, они все устойчивые, и значит параметрическая матрица $A(t_1, t_2)$ устойчива в $[6, 8] \times [0, 2]$.

Рассмотрим область, в которой $A(t_1, t_2)$ уже не будет полностью устойчива, например $[2, 4] \times [0, 3]$. При проверке видно, что матрицы $A(2, 0)$, $A(4, 0)$, $A(4, 3)$ устойчивы, а $A(2, 4)$ неустойчива. Значит матрица устойчива не во всей области $[2, 4] \times [0, 3]$.

Замечание 2. В вышеописанном примере проверка устойчивости по теореме 7 заняла 0.001 секунды, в то время как проверка по критерию Рауса–Гурвица заняла примерно 2 секунды. Данный способ является самым быстрым, но его недостаток состоит в том, что мы ничего не можем сказать о других областях, в то время как условия из критерия Рауса–Гурвица дают исчерпывающий результат.

Замечание 3. Для линейных параметрических матриц вида $A(t_1, \dots, t_s) = A_0 + A_1 t_1 + \dots + A_s t_s$ можно заключить, что область устойчивости является выпуклой областью. Действительно, предположив противное, мы получим противоречие с теоремой 7.

3.2. Исследование устойчивости симметрических матриц вида $At^p + Bt^q$

В этом параграфе матрицы A и B также являются симметрическими.

Рассмотрим теорему 7, в случае, когда $s = 1$.

Утверждение 1. Матричный полином вида $A + tB$ устойчив в интервале $[t_1, t_2]$ тогда и только тогда, когда устойчивы матрицы $A + t_1B$ и $A + t_2B$.

Далее будем рассматривать устойчивость матриц только при $t > 0$.

Теорема 8. Пусть $t > 0$, $p, q = 0, 1, 2, \dots$, $p < q$. Матричный полином $At^p + Bt^q$ устойчив в интервале $[t_1, t_2]$ тогда и только тогда, когда устойчивы матрицы $A + t_1^{q-p}B$ и $A + t_2^{q-p}B$.

Доказательство. Поскольку $t > 0$, устойчивость матрицы $A + t^nB$ можно проверять согласно утверждению 1. Далее домножим матрицу $A + t^nB$ на t^m . Устойчивость матрицы при этом не изменится. Выразим показатели m и n : $At^m + Bt^{n+m} = At^p + Bt^q$, получим $m = p$, $n = q - p$. Матрицы $At^p + Bt^q$ и $A + Bt^{q-p}$ либо одновременно устойчивы, либо одновременно неустойчивы. \square

Таким образом, мы можем выделить новый класс параметрических матриц, для которых достаточно проверить всего две граничные матрицы, чтобы заключить устойчивость всего интервала. Значит, все описанное в замечании 2 также относится к этому параграфу.

3.3. Исследование устойчивости матриц с помощью нахождения радиуса устойчивости

В этом пункте матрицы необязательно должны быть симметрическими.

В Главе 2 мы вводили понятие радиуса устойчивости матрицы $r(A) = \inf\{\|T\| \mid A + T \text{ - неустойчива}\}$. Рассмотрим теперь, как можно применять $r(A)$ для исследования устойчивости параметрических матриц.

Утверждение 2. Для того, чтобы (несимметричный) матричный интервал $[A, B]$ был устойчив, достаточно, чтобы выполнялось $\|B - A\| < r(A)$

Доказательство. Пусть $A \leq X \leq B$. Имеем, что $X = A + (X - A)$. Если выполняется $\|X - A\| < r(A)$, то тогда X - устойчива и следовательно, весь интервал $[A, B]$ устойчив. Таким образом получаем, что $\|B - A\| < r(A) \Rightarrow$ интервал $[A, B]$ - устойчив. \square

Пусть $X(t)$ - параметрическая матрица, рассматриваемая в интервале $[t', t''] = [t_0, t_n]$ (не обязательно полиномиальная). Разобьем интервал на части: $[t_0, t_n] = [t_0, t_1] \cup \dots \cup [t_{n-1}, t_n]$.

Будем вычислять $r(A)$ в точках t_0, t_1, \dots, t_n . Также найдем $\|X(t_i) - X(t_{i-1})\|$. Если мы имеем $\|X(t_i) - X(t_{i-1})\| < r(t_{i-1})$, то можно заключить, что в интервале $[t_{i-1}, t_i]$ устойчивость доказана. Таким образом мы можем получить функции r и N , уже зависящие от t .

При увеличении n , график функции $N(t)$ "приближается" к оси абсцисс, тем самым, подтверждая, что матрица действительно устойчива в этом интервале.

Дробить интервал можно не равномерно, гораздо эффективнее дробить интервал чаще там, где устойчивость сменяется на неустойчивость, и наоборот. (см. рис. 3)

Возьмем матрицу из работы [14]:

Пример([14]).

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 & -t^2 & -1 \\ t & -t-1 & t \\ t^2 & 1 & -t^2-1 \end{pmatrix}$$

В этой статье приводится достаточное условие устойчивости параметрической матрицы. Недостаток этого способа состоит в том, что не любую матрицу так можно проверить.

Применим алгоритм, указанный в данной работе. С его помощью проверим устойчивость данной матрицы на конечном интервале $[t', t'']$.

Проверим устойчивость матрицы $A(t)$ в интервале $[-0.5, 8]$. Для этого соответствующим образом раздробим наш интервал, чтобы в нем выполнялось неравенство $r(A, t) > N(t) = \|X_i - X_{i-1}\|$.

Ниже приведены графики функций r и N синим и желтым цветом соответственно. Легко видеть, что матрица действительно устойчива в интервале $[-0.5, 8]$.

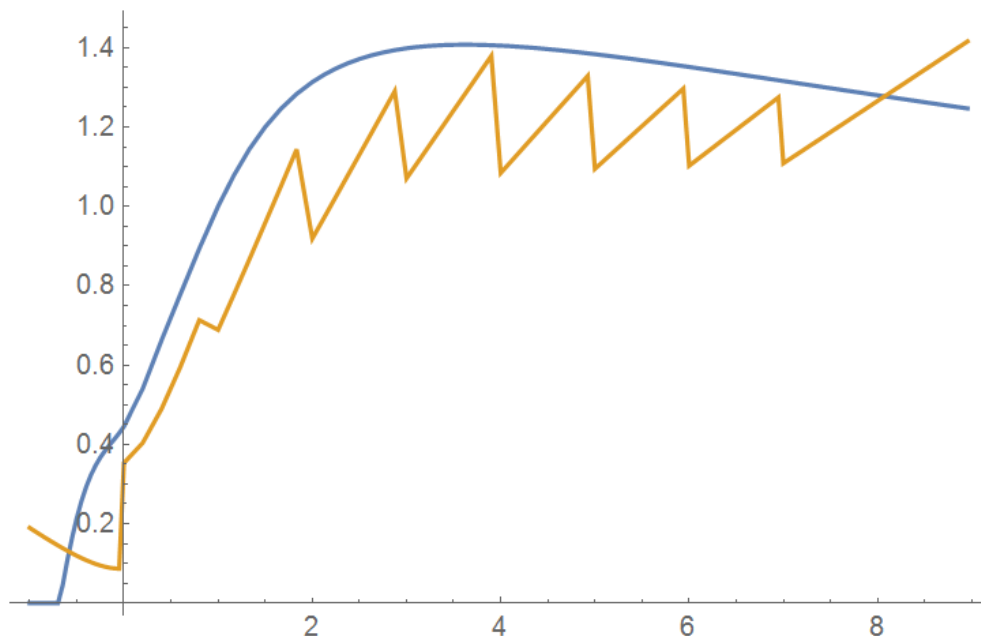


Рис. 2

В каждом из интервалов $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$, ... дробление происходит по разному: чем дальше находится интервал от 0, тем чаще требуется дробить его на более мелкие интервалы.

Этот пример примечателен еще тем, что если не проводить проверку принадлежности собственных чисел мнимой оси (см. замечание 1), то график функции r будет искажен:

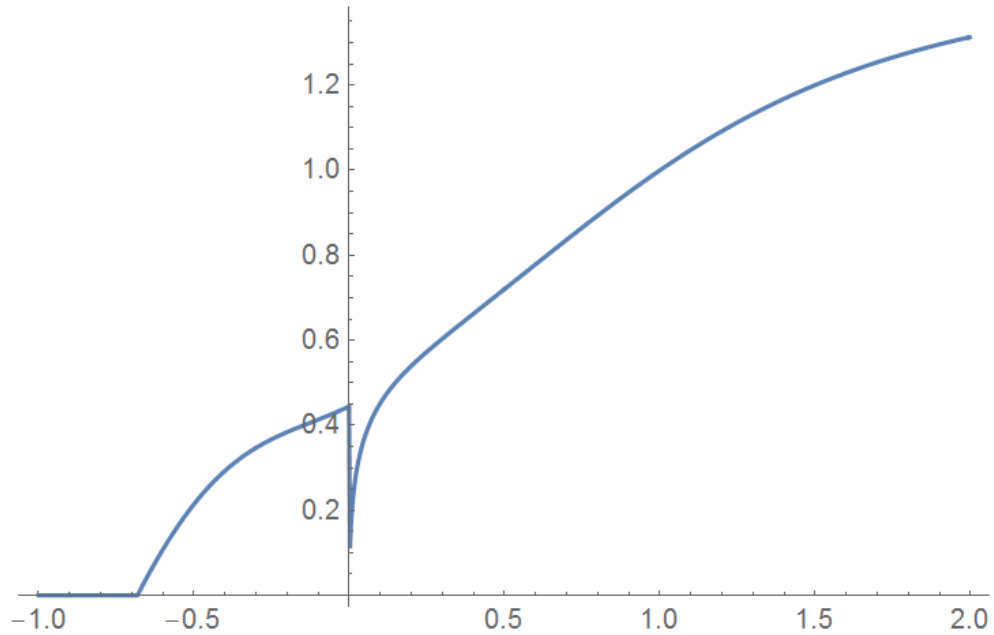


Рис. 3

Это объясняется тем, что матрицы $A(\varepsilon)$, где ε близко к 0, например

$$A(1/1024) = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{1048576} & -1 \\ \frac{1}{1024} & -\frac{1025}{1024} & \frac{1}{1024} \\ \frac{1}{1048576} & 1 & -\frac{1048577}{1048576} \end{pmatrix}$$

демонстрируют замечание 1, т.е. $H_A(t)$ имеет кратное собственное значение при $t \in (0, r(A))$.

Ниже приведен характер изменения собственных чисел матрицы $H_{A(1/1024)}(\alpha)$ при увеличении α .

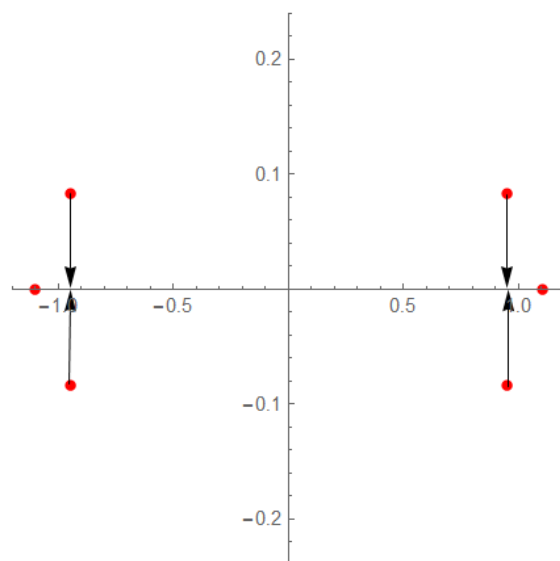


Рис. 4: Изменение α от 0 до 0.0805

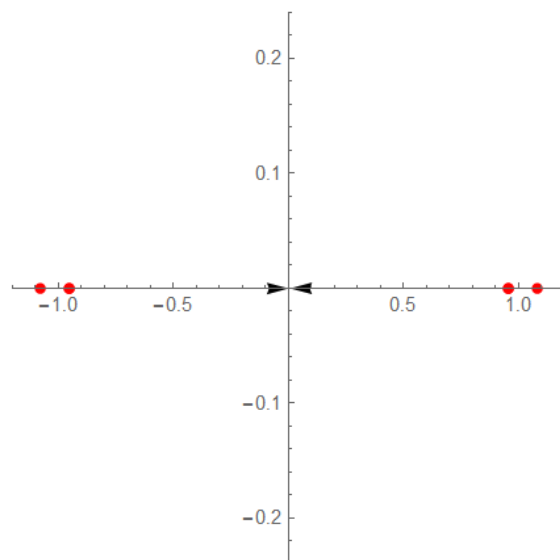


Рис. 5: Изменение α от 0.0805 до 0.445

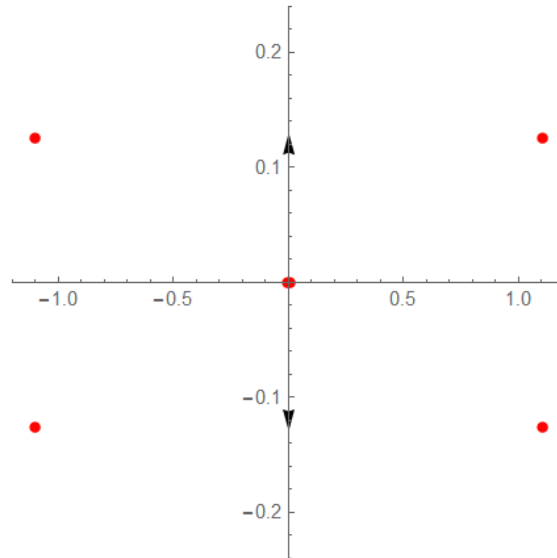


Рис. 6: Изменение α от 0.0805 до ∞

Замечание 4. Построив график $r(t)$ на интересующем нас интервале мы сможем понять, в каких точках матрица $A(t)$ устойчива. Из непрерывности $r(t)$ можно делать предположения о устойчивости матрицы во всем интервале. Это можно учитывать при работе с матрицами больших порядков (больше 12), так как проверка детерминантных неравенств Рауса–Гурвица становится вычислительно затратной. Кроме того, оценивая $\|A(t)\|$, можно понять, в какой окрестности матрица также является устойчивой. Недостатком данного метода является то, что требуется слишком часто дробить интервал, чтобы доказать устойчивость матрицы в некоторой области.

3.4. Устойчивость блочных симметричных матриц

В пункте 1.3.2 мы рассматривали устойчивость блочных постоянных симметрических матриц. Теорему 3 удобно применять для исследования устойчивости параметрических матриц специального вида:

Утверждение 3. Пусть в матрице $X(t) = \begin{pmatrix} A & B \\ B^T & C(t) \end{pmatrix}$, подматрица A является постоянной и устойчивой, а подматрица $C = C(t)$ зависит от параметра t . Тогда область устойчивости матрицы $X(t)$ совпадает с областью устойчивости матрицы $C - B^T A^{-1} B$.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$X(t) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} -222 & 1 & 0 & 1 & -8 & -5 & 3 \\ 1 & -333 & 2 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -11 & 3 & -9 & 10 & 10 \\ 1 & 1 & 3 & -222 & -1 & -3 & -5 \\ \hline -8 & 3 & -9 & -1 & -9t-1 & 8t-9 & 3t \\ -5 & -3 & 10 & -3 & 8t-9 & -5t-10 & -t-9 \\ 3 & 3 & 10 & -5 & 3t & -t-9 & -4t-8 \end{array} \right)$$

В этом случае

$$A = \begin{pmatrix} -222 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -333 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -11 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & -222 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -9t-1 & 8t-9 & 3t \\ 8t-9 & -5t-10 & -t-9 \\ 3t & -t-9 & -4t-8 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ -9 & 10 & 10 \\ -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$C - B^T A^{-1} B = \begin{pmatrix} -9t + \frac{133984007}{19961510} & 8t - \frac{169689851}{9980755} & 3t - \frac{82195552}{9980755} \\ 8t - \frac{169689851}{9980755} & -5t - \frac{7901849}{9980755} & -t + \frac{88732}{9980755} \\ 3t - \frac{82195552}{9980755} & -t + \frac{88732}{9980755} & -4t + \frac{12218969}{9980755} \end{pmatrix}$$

Областью устойчивости этой матрицы является интервал $[1.422, 10.752]$. Таким образом, в данном примере, задача устойчивости параметрической матрицы размерности 7 свелась к аналогичной задаче с размерностью матрицы 3.

Приложение. Программная реализация в Wolfram Mathematica

1. Вычисление радиуса устойчивости матрицы

Приведенная функция DistanceToInstability вычисляет значение $r(A)$ для исходной устойчивой матрицы A .

```
DistanceToInstability[A_] :=  
Block[{X, T, k, s, p, ss, An, r, a, l, ret, c},  
k = 2*Length@A;  
X[n_] := X[n] = Expand[(A - Transpose@A).(X[n - 1])  
+ (Transpose[A].A -  
Lambda^2*IdentityMatrix@Length@A).(X[n - 2])];  
X[1] = Expand@A;  
X[2] = Expand[A.A - Lambda^2*IdentityMatrix@Length@A];  
T = X[k^2 - k]; s[1] = 0;  
For[p = 2, p <= k^2 - k, p++,  
s[p] = If[EvenQ@p, 2*Tr[X[p]], 0];];  
For[p = 1, p <= (k^2 - k)/2, p++,  
ss[2 p] = Expand[2 k*s[2 p] +  
(-1)^p*Binomial[2 p, p]*s[p]^2 +  
Sum[2*Binomial[2 p, j]*(-1)^j*s[2 p - j]*s[j],  
{j, 1, p - 1}]]];  
For[p = 1, p <= (k^2 - k)/2, p++,  
An[2 p] = Expand[-(ss[2 p] +  
Sum[An[2 j]*ss[2 p - 2 j], {j, 1, p - 1}])/(2 p)];  
r = (Lambda /. NSolve[{An[(k^2 - k)] == 0,  
Lambda > 0}, Lambda]);  
c = Sort@Select[r, Positive];  
For[k = 1, k <= 10, k++, a = c[[1]];  
l = Abs@Re@Eigenvalues@HMatrix[A, a];  
If[Min@l < 10^-4, ret = a; Break[]];,  
c = Delete[c, 1];];ret]
```

2. Алгоритм проверки устойчивости параметрической матрицы с помощью нахождения $r(A)$

Функция DistanceToInstabilityPlot выводит графики функций $N(t)$ и $r(t)$, описанные в п. 3.3.

```
DistanceToInstabilityPlot[X_, var_, A_, B_, n_] :=
Block[{l, a, b, p, p2, v, v2},
a = Rationalize[A]; b = Rationalize[B];
l = Table[a + (b - a)/n k, {k, 0, n}];
p = DistanceToInstability /@
Table[X /. var -> l[[i]], {i, 1, Length@l - 1}];
p2 = Table[{l[[i]], p[[i]]}, {i, 1, Length@l - 1}];
v = Table[
MatrixNorm[(X /. var -> l[[k + 1]]) -
(X /. var -> l[[k]])], {k, 1, Length@l - 1}];
v2 = Table[{l[[i]], v[[i]]}, {i, 1, Length@l - 1}];
ListLinePlot[{p2, v2},
PlotLegends -> {"r(A)", "||X_i-X_{i-1}||"}]]
```

Список литературы

- [1] Беллман Р. Введение в теорию матриц. Изд. 2-е, доп. М.: Наука, 1969. 368 с.
- [2] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. 5-е. М.: Физматлит, 2010. 560 с.
- [3] Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. Изд. 3-е, стер. СПб: Лань, 2008. 480 с.
- [4] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 1: Основы алгебры Изд. 2-е, стер. М.: МЦНМО, 2012. 272 с.
- [5] Постников М.М. Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981, 176 с.
- [6] Серре И. А. Курс Высшей алгебры. Издание М. О. Вольфа, 1910. 574 с.
- [7] Утешев А.Ю., Калинина Е.А. Лекции по высшей алгебре. Часть II. СПб.: Соло. 2007. 279 с.
- [8] Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Изд. 3-е, стер. СПб: Лань, 2009. 736 с.
- [9] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
Фаддеев с: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, 1984. 416 с.
- [10] Byers R. A Bisection Method for Measuring the Distance of a Stable Matrix to the Unstable Matrices // SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing archive, 1988, Volume 9, Issue 5, P. 875-881.
- [11] Fuzhen Zhang The Schur Complement and Its Applications. Springer, 2005, p. 295

- [12] Hladík M. Positive Semidefiniteness and Positive Definiteness of a Linear Parametric Interval Matrix // Numerical Analysis, 2017.
- [13] Kalinina E.A. On Multiple Eigenvalues of a Matrix Dependent on a Parameter // Computer Algebra in Scientific Computing, 2016, p.305-314.
- [14] Li W., Wang L. A Criterion for Stability of Matrices // Journal Of Mathematical analysis and applications 225, 1998.
- [15] Meyer, K., Hall, G., Offin, D. Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem. Springer, 2009, p.399
- [16] Skalna I. Parametric Interval Algebraic Systems. Springer, 2018, p.191.
- [17] Van Loan C.F. How Near is a Stable Matrix to an Unstable Matrix? // Contemp. Math., 1984, v.47, p.465–478.